

注 意 問題 1, 2, 3, 4, 5 の解答を、解答用紙の所定の欄に記入しなさい。空欄（ア）～（フ）については、分数は既約分数にするなど最もふさわしいもの（数、式など）を解答用紙の所定の欄に記入しなさい。

# 1

- (1) 複素数平面上で、方程式  $|z+i|=2|z-\sqrt{3}|$  を満たす点  $z$  全体が表す図形は、中心が (ア)，半径が (イ) の円である。
- (2)  $n$  を自然数とする。1 から  $n$  までの自然数の中で 6 または 8 または 9 で割り切れるものの個数を  $a_n$  で表す。このとき、 $a_{30} =$  (ウ) となる。また、 $a_n = 1000$  を満たす最大の  $n$  は (エ) である。
- (3)  $f(x)$  を微分可能な関数とし、 $g(x) = x^3 + x$  とする。関数  $g(x)$  は微分可能な逆関数  $g^{-1}(x)$  をもつ。定数  $t$  に対して、関数  $t^2x^2 - f(g^{-1}(x))$  は  $x = t^3 + t$  で極値をとるとする。このとき、 $f'(t)$  を  $t$  の多項式で表すと  $f'(t) =$  (オ) となる。次に、任意の定数  $t$  に対して、関数  $t^2x^2 - f(g^{-1}(x))$  は  $x = t^3 + t$  で極値をとるとする。このとき、 $f(0) = -2$  ならば  $f(1) =$  (カ) である。

## 2

座標平面上の点  $P(1, 1)$  と点  $Q(1, -1)$  および曲線

$$C: y = \frac{1}{x-4} \quad (x > 4)$$

を考える。

(1) 曲線  $C$  の接線で点  $Q$  を通るものは存在しないことを証明しなさい。

(2) 曲線  $C$  の接線で点  $P$  を通るものを  $l$  とし、 $C$  と  $l$  の接点を  $A$  とする。このとき、 $l$  の方程式は  $y = \boxed{\text{(キ)}}$  であり、点  $A$  の座標は  $\boxed{\text{(ク)}}$  である。また、曲線  $C$  上の点  $B$  が

$$\overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AQ} = -\frac{2}{3}$$

を満たすとき、点  $B$  の座標は  $\boxed{\text{(ケ)}}$  である。

(3)  $A, B$  を (2) で定めた点とする。正の数  $t$  に対し、曲線  $C$  上の点  $R\left(t+4, \frac{1}{t}\right)$  は点  $A$  と異なるものとする。線分  $AR$  を  $2:1$  に内分する点を  $S$  とし、線分  $BS$  を  $3:2$  に内分する点を  $T(u, v)$  とするとき、 $u$  を  $t$  の式で表すと  $u = \boxed{\text{(コ)}}$  である。また、 $uv$  の値は  $t = \boxed{\text{(サ)}}$  のとき最小となる。

### 3

点 P, Q を数直線の原点におき, 1 個のさいころを投げて出た目に応じて P, Q を動かす。偶数の目が出たときは P を正の向きに 1 だけ動かし, 5 または 6 の目が出たときは Q を正の向きに 1 だけ動かす。たとえば, 6 の目が出たときは P, Q をともに正の向きに 1 だけ動かす。P と Q の距離が初めて 2 となるまでさいころを投げ続けることとし, P と Q の距離が 2 になったら, それ以降はさいころを投げない。n 回さいころを投げて P と Q の距離が 2 となる確率を  $p_n$  とする。

(1)  $p_2 = \boxed{\text{(シ)}}$  である。

(2) n 回さいころを投げて, P が Q よりも正の向きに 1 だけ進んでいる確率を  $x_n$ , P と Q が同じ位置にある確率を  $y_n$ , Q が P よりも正の向きに 1 だけ進んでいる確率を  $z_n$  とすると

$$y_{n+1} = \boxed{\text{(ス)}} x_n + \boxed{\text{(セ)}} y_n + \boxed{\text{(ソ)}} z_n$$

という関係式が成立する。また,  $x_n = \boxed{\text{(タ)}} z_n$  が成り立つ。ただし,  $\boxed{\text{(ス)}} \sim \boxed{\text{(タ)}}$  には数を記入すること。

(3) 関係式

$$z_{n+1} + \alpha y_{n+1} = \beta (z_n + \alpha y_n)$$

を満たす定数の組  $(\alpha, \beta)$  は,  $\boxed{\text{(チ)}}$  と  $\boxed{\text{(ツ)}}$  の 2 組ある。

(4)  $p_n$  を n を用いて表すと  $p_n = \boxed{\text{(テ)}}$  となる。

## 4

以下の設問では、区間  $[a, b]$  で連続な関数  $f(x)$ ,  $g(x)$ ,  $h(x)$  に対して、区間  $[a, b]$  で  $f(x) \leq g(x)$  ならば  $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$  であること、および  $\left| \int_a^b h(x) dx \right| \leq \int_a^b |h(x)| dx$  であることをことわりなしに用いてよい。

(1) 自然数  $n$  に対して  $I_n = \int_1^n \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{3}{2}} dx$  とする。このとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = \boxed{\text{(ト)}}$  である。

(2) 自然数  $n$  に対して  $S_n = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{3}{2}}$  とする。すべての  $n$  に対して不等式

$$S_n < 1 + \frac{5\sqrt{2}}{4}$$

を証明しなさい。

(3)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos 5x dx = \boxed{\text{(ナ)}}$  である。

(4)  $k$  を自然数とすると、 $\int_0^{2\pi} |\sin kx| dx = \boxed{\text{(ニ)}}$  である。

(5)  $f(x)$  を微分可能な関数とし、 $M$  を正の定数とする。区間  $[0, 2\pi]$  で、 $f'(x)$  は連続かつ  $|f'(x)| \leq M$  と仮定する。自然数  $k, n$  に対して、 $a_k = \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx dx$  とし、 $T_n = \sum_{k=1}^n |a_k|^{\frac{3}{2}}$  とする。このとき、すべての  $n$  に対して不等式

$$T_n < 23M^{\frac{3}{2}}$$

を証明しなさい。ただし、必要であれば(2)の不等式と(4)の等式を証明なしに用いてよい。

## 5

座標平面上に 3 点  $A(x, 0)$ ,  $B(x, y)$ ,  $C(0, y)$  をとる。ただし,  $B$  は単位円周上を動き,  $x > 0$ ,  $y > 0$  である。このとき, 線分  $AB$  と  $BC$  の長さが等しくなる  $x$  の値は  $x =$  (ヌ) である。

次に,  $n$  を 2 以上の整数とし,  $k = 1, 2, \dots, n-1$  に対して  $x = \frac{k}{n}$  のときの線分  $AB$  と  $BC$  の短い方の長さを  $L_n(k)$  と表す。 $n=4$  とすると,  $L_4(k)$  ( $k=1, 2, 3$ ) の最大値は (ネ) である。一方,  $n=5$  のとき  $L_5(k)$  が最大となる  $k$  の値は (ノ) と (ハ) の 2 個ある。同様に, 2 以上の整数  $a$  で,  $L_a(k)$  が最大となる  $k$  の値が 2 個あるものを考え, そのような  $k$  のうち大きい方の値を  $m$  とおく。このとき,  $m$  を  $a$  の式で表すと  $m =$  (ヒ) となる。また,  $b = 3a + 4m - 2$  とおいたとき,  $L_b(k)$  が最大となる  $k$  の値も 2 個あり, それらの大きい方を  $a$  と  $m$  の 1 次式で表すと (フ) となる。